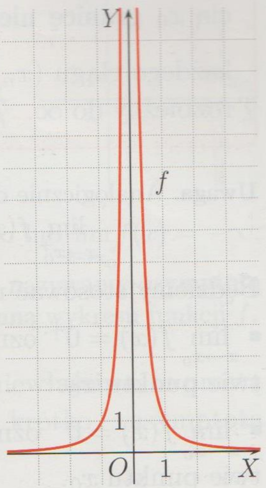
*5.4. Granice niewłaściwe

Rozpatrzmy funkcję $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $x\neq 0$ (wykres obok). Zauważmy, że dla dowolnego ciągu argumentów (x_n) takiego, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, mamy $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\infty$.



DEFINICJA

Niech f będzie funkcją określoną w sąsiedztwie punktu x_0. Funkcja f ma w punkcie x_0 **granicę niewłaściwą** ∞ ($\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$), jeśli dla każdego ciągu (x_n) zbieżnego do x_0, o wyrazach należących do dziedziny funkcji f i różnych od x_0, ciąg $(f(x_n))$ jest rozbieżny do ∞.

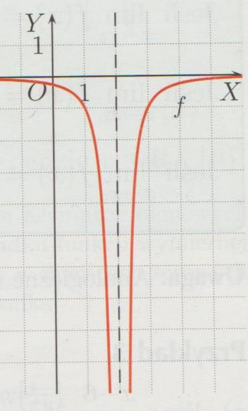
Ćwiczenie 1

Sformułuj definicję **granicy niewłaściwej** równej $-\infty$ dla funkcji f w punkcie x_0.

Przykład 1

Funkcja $f(x)=\frac{-1}{(x-2)^2}$, $x\in\mathbf{R}\setminus\{2\}$, ma w punkcie $x_0=2$ granicę niewłaściwą równą $-\infty$, co zapisujemy:

$$\lim_{x\to 2}\frac{-1}{(x-2)^2}=-\infty$$



Ćwiczenie 2

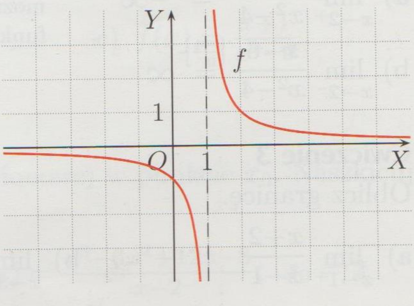
Naszkicuj wykres funkcji f. Dla jakiego $x_0\in\mathbf{R}$ ma ona granicę niewłaściwą równą $-\infty$?

a) $f(x)=\dfrac{-1}{|x-1|}$ b) $f(x)=\dfrac{-4}{|x+2|}$

Przykład 2

Dla funkcji $f(x)=\frac{1}{x-1}$, $x\in\mathbf{R}\setminus\{1\}$, nie istnieje granica $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$. Istnieją natomiast **granice niewłaściwe jednostronne** w punkcie $x_0=1$:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1}=-\infty,\qquad \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}=\infty$$



DEFINICJA

Niech f będzie funkcją określoną w przedziale $(x_0; b)$. Funkcja f ma w punkcie x_0 **granicę niewłaściwą prawostronną** ∞ ($\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \infty$), jeśli dla każdego ciągu (x_n) zbieżnego do x_0, gdzie $x_n \in (x_0; b)$, ciąg $(f(x_n))$ jest rozbieżny do ∞.

Uwaga. Analogicznie definiujemy granice:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$$

Będziemy stosować następujące oznaczenia:

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0^+$ oznacza, że $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ oraz $f(x) > 0$ w pewnym sąsiedztwie punktu x_0.
- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0^-$ oznacza, że $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ oraz $f(x) < 0$ w pewnym sąsiedztwie punktu x_0.

TWIERDZENIE

Jeśli $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0^+$ oraz $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a > 0$, to $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g(x)}{f(x)} = \infty$.

Jeśli $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0^+$ oraz $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a < 0$, to $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g(x)}{f(x)} = -\infty$.

Jeśli $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0^-$ oraz $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a > 0$, to $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g(x)}{f(x)} = -\infty$.

Jeśli $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0^-$ oraz $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a < 0$, to $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g(x)}{f(x)} = \infty$.

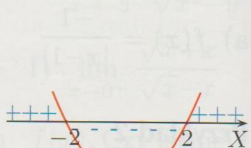
Uwaga. Analogiczne własności zachodzą dla granic jednostronnych.

Przykład 3

a) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x-6}{x^2-4} \overset{\left[\frac{-4}{0^+}\right]}{=} -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x-6}{x^2-4} \overset{\left[\frac{-4}{0^-}\right]}{=} \infty$

aby ustalić znak mianownika, można naszkicować wykres funkcji $y = x^2 - 4$



Ćwiczenie 3

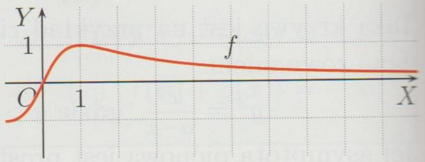
Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x+2}{x-1}$ b) $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{x-4}{3-x}$ c) $\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{x+1}{x^2-4}$

*5.5. Granica funkcji w nieskończoności

Przykład 1

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$. Rozpatrzmy ciąg argumentów (x_n) taki, że $x_n \to \infty$. Wówczas ciąg odpowiadających im wartości funkcji $(f(x_n))$ ma granicę równą zero.



DEFINICJA

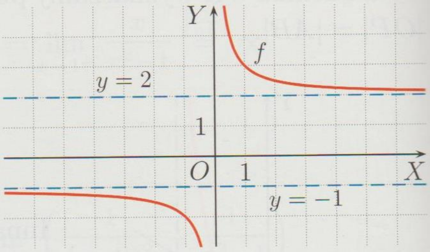
Niech f będzie funkcją określoną w przedziale $(a;\infty)$. Liczba g jest granicą funkcji f w ∞ ($\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = g$), jeśli dla każdego ciągu (x_n) rozbieżnego do ∞, o wyrazach należących do dziedziny funkcji f, ciąg $(f(x_n))$ jest zbieżny do g.

Ćwiczenie 1

Sformułuj definicję $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = g$.

Jeśli $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = k$, to prostą $y = k$ nazywamy **asymptotą poziomą** wykresu funkcji w ∞.

Jeśli $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$, to prostą $y = l$ nazywamy **asymptotą poziomą** wykresu funkcji w $-\infty$.



Wykres funkcji f ma w ∞ asymptotę poziomą $y = 2$, a w $-\infty$ – asymptotę poziomą $y = -1$.

Przykład 2

Wyznacz asymptoty poziome wykresu funkcji $f(x) = \frac{3-x^2}{2x^2+4}$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3-x^2}{2x^2+4} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(\frac{3}{x^2}-1\right)}{x^2\left(2+\frac{4}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3}{x^2}-1}{2+\frac{4}{x^2}} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3-x^2}{2x^2+4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(\frac{3}{x^2}-1\right)}{x^2\left(2+\frac{4}{x^2}\right)} = -\frac{1}{2}$$

Dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

Wykres funkcji f ma w ∞ oraz w $-\infty$ asymptotę poziomą $y = -\frac{1}{2}$.

Ćwiczenie 2

Wyznacz asymptoty poziome wykresu funkcji f.

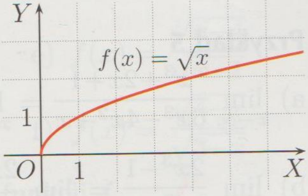
a) $f(x) = \frac{6-4x}{1+2x}$ b) $f(x) = \frac{3x^2-1}{x^2+2}$ c) $f(x) = \frac{2|x|+1}{x}$

DEFINICJA

Niech f będzie funkcją określoną w przedziale $(a;\infty)$. Funkcja f ma w ∞ granicę niewłaściwą ∞ ($\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$), jeśli dla każdego ciągu (x_n) rozbieżnego do ∞, o wyrazach należących do dziedziny funkcji f, ciąg $(f(x_n))$ jest rozbieżny do ∞.

Przykład 3

Funkcja $f(x)=\sqrt{x}$ (wykres obok) ma w ∞ granicę równą ∞.



Ćwiczenie 3

Sformułuj definicję:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$, b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$, c) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

Ćwiczenie 4

Na podstawie wykresu funkcji f określ granice: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ oraz $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

a) $f(x)=x$ b) $f(x)=x^2$ c) $f(x)=x^3$

TWIERDZENIE

Dla ustalonego $n\in\mathbf{N}_+$:

$$\lim_{x\to\infty} x^n=\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} x^n=\begin{cases}\infty & \text{dla } n \text{ parzystych}\\ -\infty & \text{dla } n \text{ nieparzystych}\end{cases}$$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[n]{x}=\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} \sqrt[n]{x}=-\infty \text{ dla } n \text{ nieparzystych}$$

Ćwiczenie 5

Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^{10}}{x^5}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(-x^3)^2}{x^4}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x}}$

TWIERDZENIE

Jeśli $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ i $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=a>0$, to $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)\cdot g(x))=\infty$.

Jeśli $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ i $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=a<0$, to $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)\cdot g(x))=-\infty$.

Jeśli $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$ i $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=a>0$, to $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)\cdot g(x))=-\infty$.

Jeśli $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$ i $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=a<0$, to $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)\cdot g(x))=\infty$.